Problemas Semifinales Semana #1
Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Nuevo León
2 al 7 de Agosto de 2015

Instrucciones:
Los problemas 1 al 4 deberán explicárselos a Héctor en la sede de Lázaro Cárdenas y entregar solución completa en limpio (cualquier día de lunes a viernes). Los problemas 5 al 10 los deben llevar resueltos el sábado al entrenamiento y discutirlos con Víctor y Ángel.

PROBLEMAS PARA REVISAR CON HÉCTOR

Problema 1. Encuentra todos los números de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y 7, y cada uno de cuyos dígitos es 3 o 7.

Problema 2. Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores), y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en las cajas de manera que no quede vacía ninguna caja y que no haya tres pelotas de colores distintos que estén en tres cajas distintas. Prueba que hay una caja tal que todas las pelotas que están fuera de ella son del mismo color.

Problema 3. En un cuadrilátero $ABCD$, inscrito en una circunferencia, llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sea M el punto medio de CD. La circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M corta a BD y a AC en los puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S sobre el segmento BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Pruebe que $AT = RC$.

Problema 4. Dados dos enteros positivos n y a se forma una lista de 2001 números como sigue: el primer número es a; a partir del segundo, cada número es el residuo que se obtiene al dividir el cuadrado del anterior entre n. A los números de la lista se les ponen los signos $+$ y $-$, alternadamente, empezando con $+$. Los números con signo, así obtenidos, se suman y a esa suma se le llama suma final para n y a. ¿Para qué enteros $n \geq 5$ existe alguna a tal que $2 \leq a \leq n$ y la suma final para n ya es positiva?

PROBLEMAS PARA REVISAR CON VICTOR

Problema 5. Algunas personas se sientan en una mesa redonda. Se sabe que hay 7 mujeres que tienen a su derecha a una mujer y 12 mujeres que tienen a su derecha a un hombre. Sabemos que 3 de cada 4 hombres tienen a su derecha a una mujer ¿cuántas personas hay sentadas en la mesa?

Problema 6. En una mesa hay 2009 fichas que son rojas de un lado y negras del otro. A y B van a jugar alternadamente por turnos. En cada turno se permite quitar cualquier cantidad de fichas de un mismo color o voltear cualquier cantidad de fichas de un mismo color. Gana quien quite la última ficha. ¿Quien tiene estrategia ganadora?

Problema 7. En una mesa hay 100 fichas, A y B van a jugar a quitar fichas de la mesa. En cada turno se vale quitar 2, 5 o 6 fichas. Pierde quien ya no puede hacer una jugada. Determina quien tiene estrategia ganadora.

Problema 8. El número

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2014^2}+\frac{1}{2015^2}}$$

es un número que se puede escribir como $\frac{p}{q}$ con p y q enteros positivos y primos relativos. Encuentra p y q.

Problema 9. ¿Cuál es el promedio de los resultados obtenidos al sumar los enteros de cada uno de los posibles subconjuntos de $\{1, 2, ..., n\}$?

Problema 10. Sea ABCD un cuadrado. Por el vértice A se traza una recta que intersecta a la prolongación del lado BC en E, al lado DC en F y a la diagonal BD en G. Si $AG = 3$ y $GF = 1$, determina la medida de FE