29^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Primer Selectivo – Yucatán

Julio 2015

1. Se tiene una cuadrícula de 5×5 y fichas rectangulares de 2×1 que se colocarán en las casillas de la cuadrícula. Decimos que la cuadrícula está *saturada* si ya no es posible colocar una ficha más sobre la cuadrícula. Determina el mínimo número de fichas con las que puedes saturar la cuadrícula.
.

2. Sea *ABCD* un trapecio con *AB* paralela a *CD*, y sean *P, Q* los puntos medios de *BD* y *AC* respectivamente. Si los ángulos *ABQ* y *CBP* son iguales, demuestra que los ángulos *DCQ* y *BCP* ´son iguales.

3. Demuestra que para cualquier par de enteros positivos distintos *m*, *n*, es posible expresar $m^6 + n^6$ como suma de dos cuadrados perfectos de una manera diferente a $(m^3)^2 + (n^3)^2$.

29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

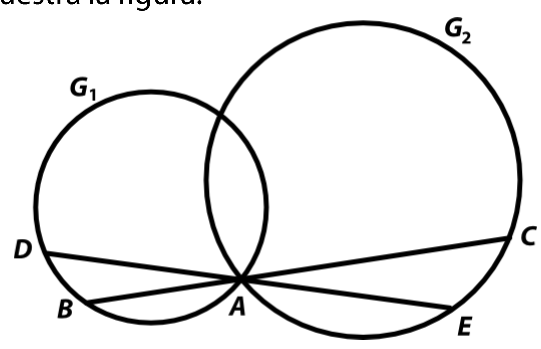
Primer Selectivo – Yucatán

Julio 2015

4. Considera una cuadrícula de 12×12 en la que están escritos números enteros positivos. Tienes dos operaciones que puedes aplicar tantas veces como quieras y en el orden que quieras.
   a) puedes multiplicar todos los números de una fila por 2.
   b) puedes restar 1 de todos los números de una columna.

   Demuestra que sin importar cuáles números están originalmente en la cuadrícula, siempre puedes lograr que todos se conviertan en ceros.

5. Sean G_1, G_2 dos círculos que se cortan en A y sean BC, DE rectas que pasan por el punto A tal como muestra la figura.



   La recta CD corta nuevamente a G_1 en M y a G_2 en N. Llama K al punto medio del arco AM y llama L al punto medio del arco AN.
   Si $BC = DE$, demuestra que el cuadrilátero $DCLK$ es cíclico.

6. Encuentra todos los enteros no negativos (a, b, c, d) tales que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^{2015}.$$